隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

一般地，如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

一般地，如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

- 隐函数的显化

$$\underbrace{F(x,y)=x+y^3-1=0 \Longrightarrow y=\sqrt[3]{1-x}.}_{\text{隐函数的显化}}$$

一般地，如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

- 隐函数的显化

$$\underbrace{F(x,y)=x+y^3-1=0 \Longrightarrow y=\sqrt[3]{1-x}.}_{\text{隐函数的显化}}$$

- 显函数: y 能通过确定的数学公式表达

$$y=\sqrt[3]{1-x}$$

例 1

求由方程 $e^y + xy - e = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　方程两边分别对 x 求导, 注意 $y=y(x)$, 即 y 是关于 x 的导数.

解　方程两边分别对 x 求导, 注意 $y=y(x)$, 即 y 是关于 x 的导数.

方程左边关于 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^y+xy-e\right)=e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

方程右边关于 x 求导

$$(0)'=0.$$

解　方程两边分别对 x 求导, 注意 $y=y(x)$, 即 y 是关于 x 的导数.

方程左边关于 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^y+xy-e\right)=e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

方程右边关于 x 求导

$$(0)'=0.$$

故

$$e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{e^y+x}\ \ (e^y+x\neq 0)$$

例 3

求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $\left(2,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线方程.

解　由导数的几何意义, 所求切线方程的斜率

$$k = y'\big|_{x=2}$$

解　由导数的几何意义, 所求切线方程的斜率

$$k = y'\big|_{x=2}$$

椭圆方程两端分别对 x 求导

$$\frac{x}{8} + \frac{2y}{9} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{9x}{16y}$$

解　由导数的几何意义, 所求切线方程的斜率

$$k = y'\big|_{x=2}$$

椭圆方程两端分别对 x 求导

$$\frac{x}{8} + \frac{2y}{9} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{9x}{16y}$$

当 $x = 2$ 时, $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 代入上式得到

$$k = y'\big|_{x=2} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

由点斜式, 所求切线方程为

$$y - \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$$

整理得到

$$\sqrt{3}x + 4y - 8\sqrt{3} = 0.$$

例 4

求由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　方程两端同时关于 x 求导

$$1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{2-\cos y}$$

解　方程两端同时关于 x 求导

$$1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{2-\cos y}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{2-\cos y}\right)=\frac{-2\sin y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{(2-\cos y)^2}$$

解　方程两端同时关于 x 求导

$$1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{2-\cos y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{2-\cos y}\right)&=\frac{-2\sin y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{(2-\cos y)^2}\\&=\frac{-2\sin y}{(2-\cos y)^2}\cdot\frac{2}{2-\cos y}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}\end{aligned}$$

忽略空气阻力，抛射体的运动轨迹可表示为

$$\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

其中 v_1, v_2 分别表示初速度水平、铅直分量，g 是重力加速度，t 是飞行时间，x 和 y 分别表示抛射体水平运动距离及高度.

忽略空气阻力, 抛射体的运动轨迹可表示为

$$\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

其中 v_1, v_2 分别表示初速度水平、铅直分量, g 是重力加速度, t 是飞行时间, x 和 y 分别表示抛射体水平运动距离及高度.
消去参数 t 得到

$$y = \frac{v_2}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2.$$

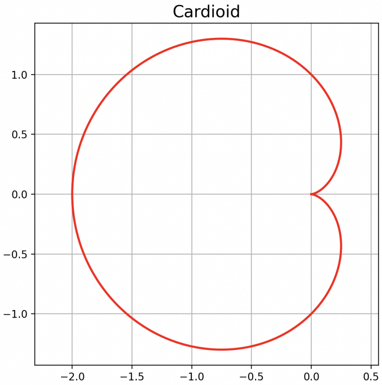
参数方程

一般地，若参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

确定 y 与 x 间的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为由该参数方程所确定的函数.

$$\begin{cases} x = (1-\cos\theta)\cos\theta \\ y = (1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$



参数方程的导数

- $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例 7

已知椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

求椭圆在 $t = \frac{\pi}{4}$ 相应的点处的切线方程.

解　当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时, 椭圆对应点 $\left(a\cos\frac{\pi}{4}, b\sin\frac{\pi}{4}\right)$, 即 $\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}b}{2}\right)$.
由导数几何意义, 所求切线的斜率

$$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{b\frac{\sqrt{2}}{2}}{-a\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{b}{a}$$

解　当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，椭圆对应点 $\left(a\cos\frac{\pi}{4}, b\sin\frac{\pi}{4}\right)$，即 $\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}b}{2}\right)$.
由导数几何意义，所求切线的斜率

$$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{b\frac{\sqrt{2}}{2}}{-a\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{b}{a}$$

由点斜式，所求切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}b}{2}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)$$

整理得到

$$bx+ay-\sqrt{2}ab=0.$$

例 9

计算由摆线的参数方程

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{[a(1-\cos t)]'}{[a(t-\sin t)]'}$$

$$=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\quad (t\neq 2k\pi, k\in\mathbb{Z})$$

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{[a(1-\cos t)]'}{[a(t-\sin t)]'}$$

$$= \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} \quad (t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{[a(1-\cos t)]'}{[a(t-\sin t)]'}$$

$$=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\qquad(t\neq 2k\pi,k\in\mathbb{Z})$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\Big/\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

解

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{[a(1-\cos t)]'}{[a(t-\sin t)]'} \\
&= \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} \quad (t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\Big/\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{\cos t - 1}\Big/[a(1-\cos t)] \\
&= \frac{-1}{a(1-\cos t)^2} \quad (t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

随堂练习

(1) 求由方程 $y^2 - 2xy + 4 = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(2) 设参数方程

$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^t, \end{cases}$$

求函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(3) 求由方程 $y = 1 + xe^y$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) 求由方程 $y^2-2xy+4=0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　方程两端关于 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2-2xy+4\right)=0.$$

(1) 求由方程 $y^2 - 2xy + 4 = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　方程两端关于 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2 - 2xy + 4\right) = 0.$$

即

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

(1) 求由方程 $y^2 - 2xy + 4 = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解　方程两端关于 x 求导

$$\frac{d}{dx}\left(y^2 - 2xy + 4\right) = 0.$$

即

$$2y\frac{dy}{dx} - 2y - 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

整理得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x} \qquad (y \neq x)$$

(2) **设参数方程**

$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^t, \end{cases}$$

求函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{(e^t)'}{(t^2+1)'} = \frac{e^t}{2t}$$

(3) 求由方程 $y=1+xe^y$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　方程两端关于 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^y\right)=e^y+xe^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

(3) 求由方程 $y=1+xe^y$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　方程两端关于 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^y\right)=e^y+xe^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

整理得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^y}{1-xe^y}$$

(3) 求由方程 $y = 1 + xe^y$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　方程两端关于 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^y\right) = e^y + xe^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

整理得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^y}{1 - xe^y}\right) = \frac{e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot (1 - xe^y) + e^{2y} + xe^{2y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{(1 - xe^y)^2}$$

代入 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^y}{1 - xe^y}$，整理得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^3} = \frac{e^{2y}(3 - y)}{(2 - y)^3}$$

作业

- 教材习题 2-4: 1(1)(4);3(1);5(2);7(1);8(1).